Ecuaciones diferenciales lineales

Notas para los cursos 21 y 22 (J.L. Mancilla Aguilar)

1. Funciones de variable real a valores complejos

A lo largo de estas notas trabajaremos con funciones definidas en un intervalo $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ a valores en $\mathbb{C}$, es decir funciones $f : \mathcal{I} \to \mathbb{C}$. Ejemplos de estas fuciones son:

Ejemplo 1

1. $f(t) = (1 + t) + i(t^3 + 1)$ $(\mathcal{I} = \mathbb{R})$,
2. $g(t) = (\operatorname{sen} t + 3it)^3$ $(\mathcal{I} = \mathbb{R})$,
3. $h(t) = \frac{1}{(1-2i)-(1-2i)t^2}$ $(\mathcal{I} = (1, +\infty))$.

Dada una función $f : \mathcal{I} \to \mathbb{C}$ quedan definidas dos funciones $f_1, f_2 : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$:

$$f_1(t) = \operatorname{Re}(f(t)) \text{ (parte real de } f(t)) \quad \text{y} \quad f_2(t) = \operatorname{Im}(f(t)) \text{ (parte imaginaria de } f(t))$$

y f puede escribirse en la forma

$$f(t) = f_1(t) + if_2(t).$$

Por ejemplo, si g es la función del Ejemplo 1, operando algebraicamente vemos que g se escribe

$$g(t) = (\operatorname{sen}^3 t - 27t^2 \operatorname{sen} t) + i(9t \operatorname{sen}^2 t - 27t^3),$$

con lo cual, la parte real de g es $g_1(t) = \operatorname{sen}^3 t - 27t^2 \operatorname{sen} t$ y la parte imaginaria es $g_2(t) = 9t \operatorname{sen}^2 t - 27t^3$.

Se dice que $f : \mathcal{I} \to \mathbb{C}$ es *continua* en $t \in \mathcal{I}$ si f_1 y f_2 son continuas en t, es decir, si tanto la parte real como la parte imaginaria de f son continuas en t, y que f es continua en $\mathcal{I}$ si es continua para todo $t \in \mathcal{I}$.

Observamos que si $f, g : \mathcal{I} \to \mathbb{C}$ son continuas en $t \in \mathcal{I}$ y $c \in \mathbb{C}$ entonces cf, $f + g$, fg también son continuas en t y que $\frac{f}{g}$ es continua en t si además $g(t) \neq 0$ (compruébelo).

Decimos que $f : \mathcal{I} \to \mathbb{C}$ es *derivable* en $t \in \mathcal{I}$ si tanto su parte real f_1 como su parte imaginaria f_2 son derivables en t y definimos la *derivada* de f en t mediante

$$f'(t) = f_1'(t) + if_2'(t).$$

En forma similar se definen las derivadas de orden 2 o superior.

Es fácil ver que permanecen válidas las reglas de derivación, es decir, si $f, g : \mathcal{I} \to \mathbb{C}$ son derivables en $t \in \mathcal{I}$ y $c \in \mathbb{C}$, entonces

1. $(cf)'(t) = cf'(t)$
2. $(f + g)'(t) = f'(t) + g'(t)$
3. $(fg)'(t) = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(t) = \frac{f'(t)g(t)-f(t)g'(t)}{g^2(t)}$ si $g(t) \neq 0$

5. $(f^n)'(t) = nf^{n-1}(t)f'(t)$ si $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

Ejemplo 2 Aplicando las reglas de derivación a las funciones del Ejemplo 1, resultan

$$g'(t) = 3(\operatorname{sen} t + 3it)^2(\cos t + 3i) \quad \text{y} \quad h'(t) = (-1)\frac{-2(1-2it)t}{[(1-2i)-(1-2i)t^2]^2}.$$

Dada $f : \mathcal{I} \to \mathbb{C}$ y dos puntos $a, b \in \mathcal{I}$ definimos

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f_1(t)dt + i\int_a^b f_2(t)dt$$

siempre que existan las integrales de la parte real e imaginaria de f que aparecen en el lado derecho.

Es fácil comprobar la linealidad de la integral:

1. $\int_a^b cf(t)dt = c\int_a^b f(t)dt$ para todo $c \in \mathbb{C}$
2. $\int_a^b (f(t)+g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$.

Para poder calcular integrales es útil, al igual que en el caso de funciones reales, introducir el concepto de primitiva. Una función $F : \mathcal{I} \to \mathbb{C}$ es *primitiva* de $f : \mathcal{I} \to \mathbb{C}$ si $F'(t) = f(t)$ para todo $t \in \mathcal{I}$. De la definición de derivada adoptada se deduce inmediatamente que F es primitiva de f si y sólo si las partes real e imaginaria de F son primitivas de, respectivamente, la partes real e imaginaria de f, en otras palabras, si $F(t) = F_1(t) + iF_2(t)$ y $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ entonces $F_1' = f_1$ y $F_2' = f_2$. Es fácil ver, a partir de esto último, que si F es primitiva de f entonces todas las primitivas de f son de la forma $F + c$ con c una constante compleja. Al igual que para funciones reales, empleamos la notación $\int f(t)dt$ para denotar una primitiva general de f. Por ejemplo,

$$\int (t^3 + 3i\ \operatorname{sen} t)dt = \int t^3 dt + 3i\int \operatorname{sen} t\, dt = \frac{t^4}{4} - 3i\ \cos t + c \quad (c \in \mathbb{C}).$$

Regla de Barrow. Si F es primitiva de f entonces

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

En efecto, si $F = F_1 + iF_2$ es primitiva de $f = f_1 + if_2$, entonces $F_1' = f_1$ y $F_2' = f_2$, y, por la regla de Barrow para funciones reales,

$$\int_a^b f_1(t)dt = F_1(b) - F_1(a) \quad \text{y} \quad \int_a^b f_2(t)dt = F_2(b) - F_2(a).$$

Luego,

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f_1(t)dt + i\int_a^b f_2(t)dt = (F_1(b) - F_1(a)) + i(F_2(b) - F_2(a)) = F(b) - F(a).$$

1.1. Función exponencial compleja

La función exponencial compleja, que extiende la función exponencial real e^x al campo complejo, es una de las funciones más importantes del análisis matemático, y juega un papel fundamental en el estudio de las ecuaciones diferenciales lineales.

Dado un número complejo $z = x + iy$, donde $x, y \in \mathbb{R}$ son las partes real e imaginaria de z, se define

$$e^z = e^x(\cos y + i \ \operatorname{sen} y).$$

Notamos que si z es real, es decir $y = 0$, $e^z = e^x$ y obtenemos la función exponencial real.

De la definición de e^z se deduce que $|e^z| = e^x$ (en consecuencia $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$) y que y es un argumento de e^z.

Como $\cos y$ y $\operatorname{sen} y$ son funciones de período 2π, también se tiene que

$$e^{z+2\pi i} = e^z \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

La función exponencial compleja mantiene la propiedad de la exponencial real

$$e^{z+z^*} = e^z.e^{z^*}$$

(para verificarlo use las identidades: $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \cos(a)\operatorname{sen}(b)$ y $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$) y permite expresar las funciones trigonométricas en función de ella. En efecto, teniendo en cuenta que para $t \in \mathbb{R}$

$$e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$$

y

$$e^{-it} = \cos(-t) + i \ \operatorname{sen}(-t) = \cos t - i \operatorname{sen} t,$$

tenemos que

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

En lo que sigue utilizaremos a menudo la siguiente propiedad que se demuestra en forma directa a partir de la definición de función exponencial empleando las propiedades de la derivada: supongamos que $P : \mathcal{I} \to \mathbb{C}$ es una función derivable, entonces

$$\left(e^{P(t)}\right)' = P'(t)e^{P(t)}.$$

En particular, tenemos que

$$\left(e^{ct}\right)' = ce^{ct} \quad (c \in \mathbb{C}).$$

Veamos una aplicación interesante de estas propiedades.

Ejemplo 3 Supongamos que queremos calcular $\int_a^b e^{\alpha t} \cos \beta t \, dt$ y $\int_a^b e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t \, dt$ con α y β reales y no ambos nulos.

Como

$$\int_a^b e^{(\alpha + i\beta)t} \, dt = \int_a^b e^{\alpha t} \cos \beta t \, dt + i \int_a^b e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t \, dt,$$

basta calcular la primera y luego tomar las partes real e imaginaria de ésta. Llamemos $c = \alpha + i\beta$. Como $\frac{e^{ct}}{c}$ es primitiva de e^{ct}, y

$$\frac{e^{ct}}{c} = \frac{(\alpha \cos \beta t + \beta \operatorname{sen} \beta t)e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \beta^2} + i \frac{(\alpha \operatorname{sen} \beta t - \beta \cos \beta t)e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \beta^2},$$

resulta que

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{\alpha t} \cos \beta t \, dt &= \left. \frac{(\alpha \cos \beta t + \beta \operatorname{sen} \beta t)e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \beta^2} \right|_a^b \\ \int_a^b e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t \, dt &= \left. \frac{(\alpha \operatorname{sen} \beta t - \beta \cos \beta t)e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \beta^2} \right|_a^b \end{aligned}$$

2. Ecuación diferencial lineal de primer orden

En esta sección consideramos la ecuación diferencial lineal de primer orden general:

$$a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t). \tag{1}$$

Cuando $b(t) \equiv 0$, es decir, $b(t)$ es la función nula, decimos que la ecuación es *homogénea*; en cualquier otro caso decimos que la ecuación es *no homogénea* o *inhomogénea*.

Por ejemplo, la ecuación

$$ty' - 2y = t \tag{2}$$

es una ecuación diferencial lineal no homogénea de primer orden. También es lineal la ecuación

$$\cos(t)y + t = \operatorname{sen}(t)y',$$

ya que se puede escribir en la forma

$$\operatorname{sen}(t)y' - \cos(t)y = t.$$

La ecuación

$$ty' + y^3 = 0,$$

no es lineal debido al término y^3. Tampoco son lineales las ecuaciones

$$yy' + 2y = 0 \qquad \text{y} \qquad y' + (t+1)y = y^2.$$

Definición de solución. Una función derivable $\phi : \mathcal{I} \to \mathbb{C}$ es *solución* de la ecuación diferencial (1) si:

- $\mathcal{I}$ es un intervalo de $\mathbb{R}$;
- al reemplazar en (1) y e y' por, respectivamente, ϕ y ϕ', la igualdad vale para todo $t \in \mathcal{I}$, es decir
$$a_0(t)\phi'(t) + a_1(t)\phi(t) = b(t) \quad \forall t \in \mathcal{I}.$$

Ejemplo 4 La función $\phi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $\phi(t) = 1/t$, es solución de la ecuación lineal homogénea

$$ty' + y = 0,$$

ya que **su dominio es un intervalo**, es derivable en él y

$$t\left(\frac{1}{t}\right)' + \frac{1}{t} = 0 \quad \forall t \in (0, +\infty).$$

Otra solución de la ecuación es la función $\varphi : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(t) = 1/t$. Notar que ϕ y φ son funciones distintas porque están definidas en **diferentes** intervalos.

La función $\psi(t) = 1/t$ con dominio $\mathbb{R} - \{0\}$ **no es solución** de la ecuación porque su dominio **no es un intervalo**.

Usualmente la ecuación diferencial (1) admite infinitas soluciones.

Ejemplo 5 la función $\phi(t) = ct^2 - t$, con c constante, es solución de (2) para cualquier valor de c, ya que

$$t(ct^2 - t)' - 2(ct^2 - t) = t \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

En muchos casos nos interesa resolver la ecuación (1) sujeta a condiciones adicionales. Un ejemplo importante de ese tipo de problema es el denominado:

Problema a valores iniciales

$$a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t), \quad y(t_0) = y_0, \tag{3}$$

el cual consiste en hallar todas las soluciones ϕ de la ecuación que satisfagan la condición $\phi(t_0) = y_0$ para ciertos t_0 e y_0 dados.

Un problema fundamental de la teoría de ecuaciones diferenciales es dar condiciones bajo las cuales el problema a valores iniciales posee solución única, es decir, condiciones que aseguren que hay una única solución ϕ de la ecuación (1) que satisface la *condición inicial* $\phi(t_0) = y_0$.

Notemos, antes de continuar, que si $\phi(t)$ es solución del problema a valores iniciales (3) entonces

$$a_0(t_0)\phi'(t_0) + a_1(t_0)\phi(t_0) = a_0(t_0)\phi'(t_0) + a_1(t_0)y_0 = b(t_0),$$

con lo cual, en el caso en que $a_0(t_0) = 0$ tenemos que y_0 debe satisfacer la relación

$$-a_1(t_0)y_0 = b(t_0)$$

y por lo tanto no puede ser arbitrario (salvo el caso excepcional en que $a_1(t_0) = b(t_0) = 0$).

Por ejemplo, el problema a valores iniciales

$$ty' - y = 2, \quad y(0) = y_0$$

carece de soluciones si $y_0 \neq -2$.

Del análisis anterior concluimos que una condición necesaria para que el problema a valores iniciales tenga solución para y_0 arbitrario, es que $a_0(t_0) \neq 0$. Es por ello que de ahora en adelante supondremos que $a_0(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathcal{I}$, donde $\mathcal{I}$ es un intervalo que contiene al punto t_0 de interés.

Dividiendo ambos miembros de (1) por $a_0(t)$ obtenemos lo que se denomina **forma normal o estándar** de la ecuación lineal

$$y' + p(t)y = f(t). \tag{4}$$

De aquí en adelante, supondremos que tanto $p(t)$ como $f(t)$ son funciones continuas a valores complejos definidas en un intervalo abierto $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$.

En lo que sigue veremos cómo hallar todas las soluciones de la ecuación (4); para ello utilizaremos el siguiente método:

Método del factor integrante

Sea $P(t)$ una función definida en $\mathcal{I}$ tal que $P'(t) = p(t)$ (es decir $P(t)$ es una primitiva de $p(t)$ en $\mathcal{I}$). Entonces, multiplicando ambos miembros de (4) por el *factor integrante* $e^{P(t)}$, y teniendo en cuenta que $e^{P(t)} \neq 0$ para todo $t \in \mathcal{I}$, tenemos que

$$y' + p(t)y = f(t) \quad \Longleftrightarrow \quad e^{P(t)}y' + e^{P(t)}p(t)y = e^{P(t)}f(t).$$

Como

$$\left[e^{P(t)}y\right]' = e^{P(t)}y' + e^{P(t)}P'(t)y = e^{P(t)}y' + e^{P(t)}p(t)y,$$

tenemos que una función y es solución de la ecuación (4) si y sólo si

$$\left[e^{P(t)}y\right]' = e^{P(t)}f(t).$$

Por lo tanto, integrando resulta que y es solución de (4) si y sólo si

$$e^{P(t)}y = \int e^{P(t)}f(t)dt,$$

o, equivalentemente, si y sólo si

$$y = e^{-P(t)} \int e^{P(t)}f(t)dt.$$

Si $Q(t)$ es una primitiva de $e^{P(t)}f(t)$, tenemos que $\int e^{P(t)}f(t)dt = Q(t) + c$ ($c \in \mathbb{C}$); por lo tanto, todas las soluciones de la ecuación (4) son de la forma

$$y(t) = [Q(t) + c]e^{-P(t)} = Q(t)e^{-P(t)} + ce^{-P(t)} \quad (c \in \mathbb{C}). \tag{5}$$

A la expresión (5) se la denomina *solución general* de la ecuación (4), pues contiene todas las posibles soluciones de ésta.

El método expuesto puede resumirse de la siguiente manera:

1. Escribir la ecuación (1) en la forma normal (4);

2. Hallar un primitiva $P(t)$ de $p(t)$;

3. multiplicar ambos miembros de la ecuación (4) por el factor integrante $\mu(t) = e^{P(t)}$, para obtener la ecuación
$$\underbrace{\mu(t)y' + \mu(t)p(t)y}_{[\mu(t)y]'} = \mu(t)f(t);$$
4. integrar ambos miembros de la ecuación y despejar $y(t)$.

De lo recién expuesto se deduce el siguiente teorema, denominado **Teorema de existencia y unicidad**.

Teorema 1 Consideremos la ecuación diferencial lineal
$$y' + p(t)y = f(t) \tag{6}$$
con $p(t)$ y $f(t)$ funciones continuas a valores complejos definidas en un intervalo $\mathcal{I}$.

Entonces, dados $t_0 \in \mathcal{I}$ e $y_0 \in \mathbb{C}$, existe una única $\phi(t) : \mathcal{I} \to \mathbb{C}$ que es solución (6) y satisface la condición $\phi(t_0) = y_0$.

Demostración. Debido al método de resolución por factor integrante, si $P(t)$ es una primitiva de $p(t)$ en $\mathcal{I}$, y $Q(t)$ es una primitiva de $e^{P(t)}f(t)$, se tiene por la fórmula (5) que toda solución de la ecuación es de la forma
$$y(t) = [Q(t) + c]e^{-P(t)} \quad \text{con c} \in \mathbb{C}.$$
Consideremos la solución $\phi(t)$ que se obtiene con el valor de la constante $c = y_0 e^{P(t_0)} - Q(t_0)$, es decir
$$\phi(t) = [Q(t) + y_0 e^{P(t_0)} - Q(t_0)]e^{-P(t)}.$$
Tal solución está definida en el intervalo $\mathcal{I}$ y satisface $\phi(t_0) = y_0$. Luego existe al menos una solución al problema a valores iniciales.

Para ver que es única, supongamos que existe otra solución $\psi(t)$ definida en $\mathcal{I}$ que satisface $\psi(t_0) = y_0$. Como $\psi(t)$ debe ser de la forma
$$\psi(t) = [Q(t) + c]e^{-P(t)},$$
tenemos que
$$y_0 = \psi(t_0) = [Q(t_0) + c]e^{-P(t_0)} \quad \Longrightarrow \quad c = y_0 e^{P(t_0)} - Q(t_0),$$
con lo cual $\phi(t) = \psi(t)$ para todo $t \in \mathcal{I}$.

Corolario 1 Consideremos la ecuación diferencial lineal
$$a_0(t)y' + a_1(t)y = b(t) \tag{7}$$
con $a_0(t)$, $a_1(t)$ y $b(t)$ funciones continuas a valores complejos definidas en un intervalo $\mathcal{I}$, y $a_0(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathcal{I}$.

Entonces, dados $t_0 \in \mathcal{I}$ e $y_0 \in \mathbb{C}$, existe una única $\phi(t) : \mathcal{I} \to \mathbb{C}$ que es solución (6) y satisface la condición $\phi(t_0) = y_0$.

Demostración. Es consecuencia inmediata del Teorema 1 y de que, como $a_0(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathcal{I}$, las soluciones de la ecuación (7) y las de la ecuación en la forma normal que se obtiene dividiendo la primera por $a_0(t)$ son las mismas.

Veamos algunos ejemplos

Ejemplo 6 Hallar la solución del problema a valor inicial

$$y' - ty = 0, \quad y(1) = -1.$$

Como la ecuación ya está en la forma normal, buscamos un factor integrante. Para ello necesitamos una primitiva de $p(t) = -t$. Como $\int (-t)\, dt = -\frac{t^2}{2} + c$, podemos tomar $P(t) = -\frac{t^2}{2}$. Luego, $\mu(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ es un factor integrante.

Multiplicando por $\mu(t)$ ambos lados de la ecuación, obtenemos

$$e^{-\frac{t^2}{2}} y' - te^{-\frac{t^2}{2}} y = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[e^{-\frac{t^2}{2}} y\right]' = 0.$$

Integrando resulta

$$e^{-\frac{t^2}{2}} y = c \quad \Longrightarrow \quad y = ce^{\frac{t^2}{2}} \quad c \in \mathbb{C}.$$

Imponiendo ahora la condición $y(1) = -1$, tenemos que

$$-1 = y(1) = ce^{\frac{t^2}{2}}\Big|_{t=1} = ce^{\frac{1}{2}},$$

con lo cual $c = -e^{-\frac{1}{2}}$ y la solución que buscamos es

$$y = -e^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{t^2}{2}} = -e^{\frac{t^2-1}{2}}.$$

Notar que la solución hallada, además de ser la única que satisface la condición $y(1) = -1$, está definida en todo $\mathbb{R}$ como afirma el Teorema de existencia y unicidad.

Ejemplo 7 Hallar la solución del problema a valores iniciales

$$y' - \operatorname{tg}(t) y = \operatorname{sen}(t), \quad y(0) = 0.$$

Como $\operatorname{tg}(t)$ está definida y es continua en los intervalos de la forma $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$,..., y el punto en el cual tenemos dada la condición inicial es $t = 0$, trabajamos en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. En ese intervalo tendremos asegurada (por el corolario del Teorema 1) la existencia de una única solución que satisface la condición inicial dada.

Como $p(t) = -\operatorname{tg}(t)$ y

$$-\int \operatorname{tg}(t)\, dt = -\int \frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos(t)}\, dt = \ln(|\cos(t)|) + c,$$

tomamos $P(t) = \ln(|\cos(t)|)$. Por lo tanto $\mu(t) = e^{\ln(|\cos(t)|)} = |\cos(t)| = \cos(t)$ (esto último porque $\cos(t) > 0$ en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$) es un factor integrante.

Multiplicando ambos lados de la ecuación por $\mu(t)$, tenemos que

$$\cos(t)y' - \operatorname{sen}(t)y = \operatorname{sen}(t)\cos(t) \quad \Longleftrightarrow [\cos(t)y]' = \operatorname{sen}(t)\cos(t).$$

Como

$$\int \frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos(t)}\, dt = -\frac{\cos^2(t)}{2} + c,$$

tenemos que

$$y = \frac{c}{\cos(t)} - \frac{\cos(t)}{2} \quad c \in \mathbb{C}.$$

Imponiendo la condición inicial $y(0) = 0$, resulta que

$$0 = y(0) = \frac{c}{\cos(0)} - \frac{\cos(0)}{2} = c - \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{2},$$

con lo cual la solución buscada es

$$\phi(t) = \frac{1}{2\cos(t)} - \frac{\cos(t)}{2}$$

.

Ejemplo 8 Consideremos ahora el problema a valores iniciales

$$ty' - y = t^3 e^t, \quad y(-1) = 1. \tag{8}$$

Como la función $a_0(t) = t$ se anula en $t = 0$, para pasar a la forma normal deberemos trabajar en $(-\infty, 0)$ o en $(0, +\infty)$. Como el dato inicial es $y(-1) = 1$, el intervalo de trabajo debe ser $(-\infty, 0)$.

La forma normal resultante es

$$y' - \frac{y}{t} = t^2 e^t \quad (t < 0).$$

Como $p(t) = -\frac{1}{t}$ y $\int(-\frac{1}{t})\, dt = -\ln(|t|) + c$, escogemos $P(t) = -\ln(|t|) = \ln(|\frac{1}{t}|)$. Entonces, el factor integrante es $\mu(t) = e^{\ln(|\frac{1}{t}|)} = |\frac{1}{t}|$. Como $t < 0$, tenemos que $\mu(t) = -\frac{1}{t}$.

Multiplicando ambos lados de la ecuación por $\mu(t)$ obtenemos,

$$-\frac{1}{t}y' + \frac{1}{t^2}y = -te^t \quad \Longleftrightarrow \quad \left[-\frac{1}{t}y\right]' = -te^t.$$

Como $\int(-t)e^t\, dt = (1-t)e^t + c$, resulta entonces que todas las soluciones de la ecuación en el intervalo $(-\infty, 0)$ satisfacen

$$-\frac{y}{t} = (1-t)e^t + c \quad \Longleftrightarrow \quad y = (t^2 - t)e^t - ct \quad c \in \mathbb{C}.$$

Imponiendo la condición inicial $y(-1) = 1$, obtenemos $c = 1 - \frac{2}{e}$ y la solución es

$$y(t) = (t^2 - t)e^t + \left(\frac{2}{e} - 1\right)t.$$

Note que la función obtenida es solución de la ecuación (8) en todo $\mathbb{R}$ y no sólo en el intervalo $(-\infty, 0)$ como asegura el Corolario del Teorema de existencia y unicidad.

Ejemplo 9 Hallar todas las soluciones de la ecuación

$$\mathrm{Sh}(t)y' + \mathrm{Ch}(t)y = \frac{1-t}{1+t}.$$

Como $\mathrm{Sh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = 0$ si y sólo si $t = 0$ y $f(t) = \frac{1-t}{1+t}$ es continua en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(-1, +\infty)$, el Corolario del teorema de existencia y unicidad nos asegura la existencia y unicidad de las soluciones en cada uno de los siguientes intervalos: $\mathcal{I}_1 = (-\infty, -1)$, $\mathcal{I}_2 = (-1, 0)$ e $\mathcal{I}_3 = (0, +\infty)$.

Para hallar las soluciones definidas en esos intervalos, podemos pasar a la forma normal y proceder como en los ejemplos anteriores. Sin embargo ello no es necesario en este caso, pues, como

$$[\mathrm{Sh}(t)]' = \left[\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right]' = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \mathrm{Ch}(t),$$

$$\mathrm{Sh}(t)y' + \mathrm{Ch}(t)y = [\mathrm{Sh}(t)y]',$$

y la ecuación se puede escribir

$$[\mathrm{Sh}(t)y]' = \frac{1-t}{1+t}.$$

Como

$$\int \frac{1-t}{1+t}\,dt = -\int \frac{t-1}{1+t}\,dt = -\int \frac{t+1-2}{1+t}\,dt = -\int \left[1 - \frac{2}{1+t}\right]\,dt = -t + \ln(|1+t|^2) + c,$$

tenemos que

$$y(t) = \frac{\ln(|1+t|^2) - t}{\mathrm{Sh}(t)} + \frac{c}{\mathrm{Sh}(t)} \quad c \in \mathbb{C}.$$

La fórmula obtenida describe todas las soluciones de la ecuación en cada uno de los intervalos $\mathcal{I}_i$ con $i = 1, 2, 3$ (note que $y(t)$ no está definida en los puntos $t = -1$ y $t = 0$).

2.1. Estructura de las soluciones de la ecuación lineal de 1er orden

En la sección anterior resolvimos el siguiente problema:
Hallar todas las soluciones de la ecuación

$$y' + p(t)y = f(t) \tag{9}$$

siendo $p(t)$ y $f(t)$ funciones continuas a valores complejos definidas en un intervalo $\mathcal{I}$.

En el lenguaje del álgebra lineal el problema anterior puede plantearse del siguiente modo:

Sean $\mathcal{C}(\mathcal{I}) = \{\phi : \mathcal{I} \to \mathbb{C} : \ \phi \text{ es continua en } \mathcal{I}\}$ y $\mathcal{C}^1(\mathcal{I}) = \{\phi : \mathcal{I} \to \mathbb{C} : \ \phi, \ \phi' \text{ son continuas en } \mathcal{I}\}$, entonces se tiene que ambos conjuntos son espacios vectoriales complejos con la suma y el producto por escalares usuales para funciones. Sea $L : \mathcal{C}^1(\mathcal{I}) \to \mathcal{C}(\mathcal{I})$ la transformación lineal definida por

$$L(y) = y' + p(t)y.$$

Entonces resolver la ecuación (9) es equivalente a hallar todas las funciones $y \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I})$ tales que

$$L(y) = f,$$

lo cual a su vez es equivalente a hallar la preimagen de f vía L.

En el caso particular en que la ecuación es homogénea, es decir, $f(t) \equiv 0$, resolver la ecuación es equivalente a hallar el núcleo de la transformación L, en otras palabras, si denominamos $\mathcal{S}$ al conjunto de soluciones de la ecuación

$$y' + p(t)y = 0 \tag{10}$$

entonces

$$\mathcal{S} = \{\phi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I}) : L(y) = 0\} = \mathrm{Nu}(L).$$

El siguiente resultado dará información sobre la estructura de las soluciones de la ecuación (9).

Teorema 2 Dada una transformación lineal $T : V \to W$, con V y W espacios vectoriales, y dados $w \in \mathrm{Im(T)}$ y $v_p \in V$ tal que $T(v_p) = w$, el conjunto de soluciones de la ecuación

$$T(v) = w,$$

denominado $T^{-1}(w)$, es de la forma

$$T^{-1}(w) = \{v \in V : \ v = v_p + v_h \text{ con } v_h \in \mathrm{Nu}(T)\}.$$

Demostración. Sea $v = v_p + v_h$ con $v_h \in \mathrm{Nu}(T)$, entonces $T(v) = T(v_p + v_h) = T(v_p) + T(v_h) = w + 0 = w$, con lo cual $v \in T^{-1}(w)$. Por otro lado, si $v \in T^{-1}(w)$, entonces $T(v) = w$. Como T es lineal, $T(v - v_p) = T(v) - T(v_p) = w - w = 0$. Entonces $v_h = v - v_p \in \mathrm{Nu}(T)$ y $v = v_p + v_h$.

Considerando $L = T$ y teniendo en cuenta que el conjunto de soluciones de (9) es $L^{-1}(f)$ y que $\mathrm{Nu}(L)$ es el conjunto de soluciones de (10), tenemos el siguiente resultado, que nos informa sobre la estructura de las soluciones de una ecuación diferencial lineal no homogénea.

Corolario 2 Sea y_p una solución particular de la ecuación diferencial lineal (9). Entonces y es solución de (9) si y sólo si $y = y_p + y_h$ con y_h solución de la ecuación homogénea (10).

Este resultado nos dice que para hallar todas las soluciones de la ecuación (9) es suficiente resolver la ecuación homogénea asociada y hallar una solución particular de la ecuación no homogénea.

Respecto de la ecuación homogénea (10), como el conjunto $\mathcal{S}$ de soluciones de la ecuación es el núcleo de la transformación lineal L, tenemos que $\mathcal{S}$ es **un subespacio de** $\mathcal{C}^1(\mathcal{I})$. Con el objeto de determinar su dimensión, tengamos en cuenta que, de acuerdo con la fórmula (5), la solución general y_h de (10) es

$$y_h(t) = [Q(t) + c]e^{-P(t)} \quad c \in \mathbb{C},$$

con $P(t)$ una primitiva de $p(t)$ y $Q(t)$ primitiva de $f(t)e^{P(t)}$. Como en este caso $f(t) \equiv 0$, podemos tomar $Q(t) \equiv 0$, con lo cual

$$y_h = ce^{-P(t)} \quad c \in \mathbb{C}.$$

Esto nos dice que $\mathcal{S}$ está generado por $e^{-P(t)}$ y que por lo tanto tiene dimensión 1. Pero entonces **cualquier solución no trivial** ϕ_h de (10) genera $\mathcal{S}$ y por lo tanto

$$y_h = c\phi_h \quad (c \in \mathbb{C}) \quad \text{es la solución general de (10).}$$

En otras palabras $\{\phi_h\}$ es base del conjunto de soluciones de la ecuación homogénea (10).

Teorema 3 Consideremos la ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden (10) con $p(t)$ continua en el intervalo abierto $\mathcal{I}$. Entonces

1. Si ϕ_h es una solución no trivial de (10) entonces $\{\phi_h\}$ es una base de soluciones de la ecuación (10), es decir, la solución general de la ecuación es

$$y_h = c\phi_h \quad (c \in \mathbb{C}).$$

2. Si $P(t)$ una primitiva de $p(t)$, entonces $\phi_h = e^{-P(t)}$ es solución no trivial de (10).

Ejemplo 10 Consideremos la ecuación

$$y' + 3y = 0.$$

Es fácil comprobar que $\phi_h(t) = e^{-3t}$ es una solución no trivial. Entonces todas las soluciones son de la forma

$$y_h = ce^{-3t} \quad c \in \mathbb{C}.$$

Ejemplo 11 Resolver

$$y' + \operatorname{tg}(t)y = 0.$$

En este caso es fácil ver que $\phi_h(t) = \cos(t)$ es solución de la ecuación en cualquier intervalo en el cual $\operatorname{tg}(t)$ esté definida. Luego,

$$y_h = c\cos(t) \quad c \in \mathbb{C},$$

es la solución general de la ecuación en cualquier intervalo (a, b) contenido en el dominio de $\operatorname{tg}(t)$.

Observación 1 El conjunto $\mathcal{S}$ de soluciones de la ecuación homogénea

$$a_0(t)y' + a_1(t)y = 0,$$

con $a_0(t)$ y $a_1(t)$ continuas en un intervalos $\mathcal{I}$ también es un subespacio de $\mathcal{C}^1(\mathcal{I})$, y tiene dimensión 1 si $a_0(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathcal{I}$. Cuando $a_0(t)$ se anula en algún punto t^* de $\mathcal{I}$, entonces no es posible asegurar que $\mathcal{S}$ tenga dimensión 1, como lo demuestra el siguiente ejemplo.

Consideremos la ecuación

$$ty' + y = 0.$$

Tomemos un intervalo cualquiera de la forma $\mathcal{I} = (a, b)$ con $a < 0$ y $b > 0$ y veamos que la única solución de la ecuación definida en $\mathcal{I}$ es la nula, con lo cual $\dim(\mathcal{S}) = 0$.

Supongamos que $y : (a, b) \to \mathbb{C}$ es solución de la ecuación, entonces, dado que $ty' + y = [ty]'$, tenemos que

$$[ty]' = 0 \quad \forall t \in (a, b).$$

Luego, necesariamente, $ty = k$ para alguna constante $k \in \mathbb{C}$. Como y está definida en (a, b), y $0 \in (a, b)$, tenemos que

$$ty|_{t=0} = k \quad \Rightarrow k = 0,$$

y por lo tanto y es la función nula.

Respecto del cálculo de soluciones particulares de (9), una vez que se dispone de una solución no trivial de la ecuación homogénea asociada, éstas puede hallarse a través del siguiente:

Método de variación de parámetros.

Supongamos que ϕ_h es una solución no trivial de la ecuación lineal homogénea (10). Debido al punto 2. del Teorema 3, $\phi_h = ce^P$ para alguna primitiva P de p y alguna constante no nula c, y por lo tanto no se anula en ningún punto de $\mathcal{I}$.

Propongamos una solución particular de (9) de la forma $y_p = u\phi_h$, con u una función derivable a determinar.

Reemplazando en la ecuación (9) tenemos

$$u'\phi_h + u\phi_h' + pu\phi_h = f.$$

Como $u\phi_h' + pu\phi_h = u(\phi_h' + p\phi_h') = 0$, tenemos que debe ser

$$u'\phi_h = f,$$

o, equivalentemente,

$$u = \int \frac{f(t)}{\phi_h(t)}dt.$$

Observamos que combinando esto último con lo desarrollado previamente, tenemos la siguiente fórmula para la solución general de la ecuación lineal no homogénea

$$y = u\phi_h + c\phi_h, \quad c \in \mathbb{C} \tag{11}$$

donde ϕ_h es una solución no trivial de la ecuación homogénea (10) y u es una primitiva de f/ϕ_h. Tomando $\phi_h = e^{-P}$ con P una primitiva de p, la fórmula (11) coincide con la fórmula (5) hallada anteriormente.

Ejemplo 12 Hallar la solución del problema a valor inicial

$$y' + ty = 2t, \quad y(0) = 1.$$

De acuerdo con el Teorema 3, como $P(t) = \frac{t^2}{2}$ es una primitiva de $p(t) = t$, $\phi_h = e^{-P(t)} = e^{-\frac{t^2}{2}}$ es una solución no trivial de la ecuación homogénea asociada. Planteamos una solución particular de la forma $y_p = u\phi_h$. Reemplazando en la ecuación no homogénea queda

$$u'e^{-\frac{t^2}{2}} - t\,u\,e^{-\frac{t^2}{2}} + t\,u\,e^{-\frac{t^2}{2}} = 2t,$$

con lo cual

$$u' = 2te^{\frac{t^2}{2}}.$$

integrando obtenemos

$$u = 2e^{\frac{t^2}{2}} + k.$$

Como estamos buscando una solución particular, consideramos $k = 0$ y obtenemos

$$y_p = 2e^{\frac{t^2}{2}}e^{-\frac{t^2}{2}} = 2.$$

Luego, la solución general de la ecuación es

$$y = ce^{-\frac{t^2}{2}} + 2 \quad (c \in \mathbb{C}).$$

Imponiendo la condición $y(0) = 1$, tenemos que

$$1 = y(0) = ce^{-\frac{t^2}{2}} + 2\Big|_{t=0} = c + 2,$$

con lo cual $c = -1$ y la solución que buscamos es

$$y = -e^{-\frac{t^2}{2}} + 2.$$

Ejemplo 13 Consideremos la ecuación no homogénea

$$y' - y/t = 3t \quad t > 0.$$

Es fácil ver que $\phi_h(t) = t$ es solución no trivial de la ecuación homogénea asociada. Por lo tanto, para hallar la solución general basta con encontrar una solución particular. En lugar de aplicar el método de variación de parámetos, propongamos una solución de la forma $y_p(t) = At^2$ con A una constante a determinar (cuidado: esto puede o no funcionar!). Entonces tenemos que

$$y_p' - y_p'/t = 2At - At = At = 3t \quad \Leftrightarrow \quad A = 3.$$

Por ende $y_p = 3t^2$ es una solución particular y la solución general es

$$y = 3t^2 + ct \quad (c \in \mathbb{C}).$$

Finalizamos este estudio general de la ecuación lineal de primer orden enunciando lo que se conoce como principio de superposición.

Teorema 4 Sean y_1 una solución de (9) con $f = f_1$ e y_2 una solución de (9) con $f = f_2$. Entonces $y = c_1y_1 + c_2y_2$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, es solución de (9) con $f = c_1f_1 + c_2f_2$.

Demostración. Como $L(y_1) = f_1$ y $L(y_2) = f_2$,

$$L(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1L(y_1) + c_2L(y_2) = c_1f_1 + c_2f_2,$$

que es lo que se quería probar.

2.2. Ecuación de primer orden a coeficientes constantes

Ahora estudiaremos el caso particular en que la función $p(t)$ en (9) es constante, es decir, la ecuación

$$y' - \lambda y = f(t) \quad (\lambda \in \mathbb{C}). \tag{12}$$

Por lo visto en el caso general, teniendo ahora en cuenta que $p(t) = -\lambda$ y que $P(t) = -\lambda t$ es primitiva de $p(t)$, tenemos que la solución general de la ecuación lineal homogénea

$$y' - \lambda y = 0 \tag{13}$$

es $y = ce^{\lambda t}$ con $c \in \mathbb{C}$. Por lo tanto $B = \{e^{\lambda t}\}$ es base del espacio de soluciones de (13) y, por (11),

$$y = ue^{\lambda t} + ce^{\lambda t} \quad (c \in \mathbb{C}), \tag{14}$$

con

$$u(t) = \int f(t)e^{-\lambda t}\, dt, \tag{15}$$

es la solución general de (12). Observamos que $y_p = u(t)e^{\lambda t}$ es una solución particular de la ecuación no homogénea.

Vamos a analizar ahora la forma que adquiere la solución particular y_p en el caso en que $f(t)$ es de la forma

$$f(t) = q(t)e^{\alpha t}$$

con $q(t)$ un polinomio de grado n y $\alpha \in \mathbb{C}$.

Es conveniente considerar dos casos: $\alpha = \lambda$ y $\alpha \neq \lambda$.

Caso $\alpha = \lambda$.

En este caso,

$$u(t) = \int q(t)e^{\alpha t}e^{-\lambda t}\, dt = \int q(t)dt = q^*(t) + k,$$

con $q^*(t)$ un polinomio de grado $n+1$ tal que $(q^*)'(t) = q(t)$ y k una constante compleja arbitraria. Eligiendo la constante k de modo tal que el término independiente de la suma $q^*(t)+k$ sea nulo, vemos que podemos elegir $u(t)$ de modo tal

$$u(t) = t\hat{q}(t) \quad \text{con } \hat{q}(t) \text{ un polinomio de grado } n.$$

Luego, existe una solución particular y_p de la forma

$$y_p = t\hat{q}(t)e^{\alpha t} \quad \text{con } \hat{q}(t) \text{ un polinomio de grado } n.$$

Caso $\alpha \neq \lambda$.

Ahora,

$$u(t) = \int q(t)e^{\alpha t}e^{-\lambda t}\, dt = \int q(t)e^{\beta t}dt,$$

con $\beta = \alpha - \lambda \neq 0$.

Si $q(t) = a_nt^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0$ con $a_n \neq 0$, y escribimos $q(t) = a_nt^n + q_1(t)$ con $q_1(t) = a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0$, tenemos que

$$\int q(t)e^{\beta t}dt = a_n \int t^n e^{\beta t}\, dt + \int q_1(t)e^{\beta t}\, dt.$$

Como por la fórmula de integración por partes,

$$\int t^n e^{\beta t}\, dt = \frac{t^n}{\beta}e^{\beta t} - \int \frac{n}{\beta}t^{n-1}e^{\beta t}\, dt,$$

resulta que

$$\int q(t)e^{\beta t}dt = \frac{a_n}{\beta}t^n e^{\beta t} + \int [q_1(t) - \frac{na_n}{\beta}t^{n-1}]e^{\beta t}\, dt = \frac{a_n}{\beta}t^n e^{\beta t} + \int q^*(t)e^{\beta t}\, dt$$

con $q^*(t) = q_1(t) - \frac{na_n}{\beta}t^{n-1}$ un polinomio de grado $n-1$ o menor. Procediendo ahora con $\int q^*(t)e^{\beta t}\, dt$ como hicimos con $\int q(t)e^{\beta t}dt$, llegaremos, después de un número finito de pasos, a una expresión de la forma

$$\int q(t)e^{\beta t}dt = \hat{q}(t)e^{\beta t} + k,$$

con $\hat{q}(t)$ un polinomio de grado n y k una constante compleja arbitraria. Tomando $k = 0$, tendremos $u(t) = \hat{q}(t)e^{\beta t}$ y la solución particular

$$y_p = \hat{q}(t)e^{\beta t}e^{\lambda t} = \hat{q}(t)e^{\alpha t}.$$

Luego, hemos probado la existencia de una solución particular y_p de la forma

$$y_p = \hat{q}(t)e^{\alpha t} \quad \text{con } \hat{q}(t) \text{ un polinomio de grado } n.$$

Como resultado del análisis efectuado, se tiene el siguiente

Teorema 5 Consideremos la ecuación lineal de primer orden a coeficientes constantes (12) con

$$f(t) = q(t)e^{\alpha t}, \quad q(t) \text{ un polinomio de grado } n.$$

Entonces

1. Si $\alpha = \lambda$, existe una solución particular y_p de la forma
$$y_p = t\hat{q}(t)e^{\alpha t} \quad \text{con } \hat{q}(t) \text{ un polinomio de grado } n.$$

2. Si $\alpha \neq \lambda$, existe una solución particular y_p de la forma
$$y_p = \hat{q}(t)e^{\alpha t} \quad \text{con } \hat{q}(t) \text{ un polinomio de grado } n.$$

Ejemplo 14 Hallar la solución general de la ecuación

$$y' + 2y = 3te^t.$$

Dado que $\lambda = -2$, la solución general de la ecuación homogénea es, en este caso,

$$y = ce^{-2t} \quad (c \in \mathbb{C}).$$

Por otra parte, debido a que $\alpha = 1 \neq \lambda$, sabemos que existe una solución particular de la forma

$$y_p = (At + B)e^t.$$

Para hallar A y B reemplazamos en la ecuación diferencial y e y' por y_p e y_p', respectivamente:

$$\begin{aligned} [(At+B)e^t]' + 2(At+B)e^t &= 3te^t \\ Ae^t + (At+B)e^t + 2(At+B)e^t &= 3te^t \\ [3At + (A+3B)]\, e^t &= 3te^t. \end{aligned}$$

Cancelando e^t, tenemos que

$$3At + (A + 3B) = 3t,$$

y, por lo tanto $A = 1$ y $B = -1/3$. Luego,

$$y_p = \left(t - \frac{1}{3}\right) e^t,$$

y la solución general es

$$y = \left(t - \frac{1}{3}\right) e^t + ce^{-2t}.$$

Ejemplo 15 Resolver el problema a valor inicial

$$y' + 2y = 3te^t + 5e^{-2t}, \quad y(0) = 2.$$

Primero hallamos la solución general. Dado que la solución general de la ecuación homogénea es la misma que la del ejemplo anterior, basta hallar una solución particular. Para ello empleamos el principio de superposición, es decir, buscamos soluciones particulares para las ecuaciones

$$y' + 2y = 3te^t \quad \text{e} \quad y' + 2y = 5e^{-2t},$$

y luego las sumamos (superponemos). Como del ejemplo anterior sabemos que $\hat{y}_p = \left(t - \frac{1}{3}\right) e^t$ es una solución particular para la primera ecuación, sólo nos resta hallar una para la segunda. En este caso $\alpha = -2 = \lambda$, y el polinomio que acompaña al término e^{-2t} es el constante 5. Luego la solución particular que debemos proponer es

$$y_p = tAe^{-2t}.$$

Operando como en el ejemplo anterior, llegamos a que

$$Ae^{-2t} - 2Ate^{-2t} + 2Ae^{-2t} = 5e^{-2t}.$$

Por lo tanto $A = 5$, obteniéndose la solución particular $y_p^* = 5te^{-2t}$. Sumando ahora la solución particular para la primera ecuación con esta última, obtenemos

$$y_p = \left(t - \frac{1}{3}\right) e^t + 5te^{-2t},$$

y la solución general

$$y = \left(t - \frac{1}{3}\right) e^t + 5te^{-2t} + ce^{-2t}.$$

Finalmente, con la condición inicial $y(0) = 2$, determinamos c:

$$\left. \left(t - \frac{1}{3}\right) e^t + 5te^{-2t} + ce^{-2t} \right|_{t=0} = -\frac{1}{3} + c = 2,$$

y, por ende, $c = \frac{7}{3}$.

Ahora veremos que el método de selección se puede extender al caso en que en la ecuación (12) $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f(t) = q(t)e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ ó $q(t)e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}(\beta t)$ con q un polinomio con coeficientes reales y α y $\beta \neq 0$ son reales.

Para ello notamos primero que si $y_p = y_{p1} + iy_{p2}$ (con y_{p1} e y_{p2} las partes real e imaginaria de y_p) es solución particular de la ecuación

$$y' - \lambda y = F(t) \qquad \text{con } F(t) = F_1(t) + iF_2(t),$$

entonces (probarlo)

$$y'_{p1} - \lambda y_{p1} = F_1(t) \qquad \text{y} \qquad y'_{p2} - \lambda y_{p2} = F_2(t).$$

Supongamos entonces que $f(t) = q(t)e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ ó $q(t)e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}(\beta t)$ con $q(t)$, α y β como dijimos antes. Llamemos $F(t) = q(t)e^{\lambda_1 t}$ con $\lambda_1 = \alpha + i\beta$. Entonces la parte real de $F(t)$ es $F_1(t) = q(t)e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ y la parte imaginaria es $F_2(t) = q(t)e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}(\beta t)$. Dado que $\lambda \neq \lambda_1$, por el punto 2. del Teorema 5 existe una solución particular y_p de la ecuación

$$y' - \lambda y = F(t)$$

de la forma

$$y_p = \hat{q}(t)e^{\lambda_1 t} \quad \text{con } \hat{q} \text{ un polinomio del mismo grado que } q.$$

Entonces, la parte real de y_p es solución de la ecuación

$$y' - \lambda y = q(t)e^{\alpha t}\cos(\beta t),$$

y la parte imaginaria de de y_p es solución de la ecuación

$$y' - \lambda y = q(t)e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}(\beta t).$$

Veamos ahora que forma tienen las partes real e imaginaria de y_p.

Escribamos $\hat{q}(t) = \hat{q}_1(t) + i\hat{q}_2(t)$, donde $\hat{q}_1(t)$ y $\hat{q}_2(t)$ son, respectivamente, las partes real e imaginaria de $\hat{q}$. Tanto $\hat{q}_1(t)$ como $\hat{q}_2(t)$ son polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual al de $\hat{q}$.

Entonces

$$\begin{aligned} y_p &= \hat{q}(t)e^{\lambda_1 t} \\ &= (\hat{q}_1(t) + i\hat{q}_2(t))e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\,\mathrm{sen}(\beta t)) \\ &= [e^{\alpha t}(\hat{q}_1(t)\cos(\beta t) - \hat{q}_2(t)\,\mathrm{sen}(\beta t))] + i[e^{\alpha t}(\hat{q}_1(t)\,\mathrm{sen}(\beta t) + \hat{q}_2(t)\cos(\beta t))], \end{aligned}$$

con lo cual

$$y_{p1} = e^{\alpha t}(\hat{q}_1(t)\cos(\beta t) - \hat{q}_2(t)\,\mathrm{sen}(\beta t)) \quad \text{e} \quad y_{p2} = e^{\alpha t}(\hat{q}_1(t)\,\mathrm{sen}(\beta t) + \hat{q}_2(t)\cos(\beta t)).$$

En ambos casos las soluciones particulares halladas tienen la forma

$$y_p = e^{\alpha t}(q_1^*(t)\cos(\beta t) + q_2^*(t)\,\mathrm{sen}(\beta t))$$

con q_1^* y q_2^* polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que el grado de q.

Hemos demostrado el siguiente teorema

Teorema 6 Consideremos la ecuación lineal de primer orden a coeficientes constantes (12) con $\lambda \in \mathbb{R}$ y

$$f(t) = q(t)e^{\alpha t}\cos(\beta t) \quad \text{ó} \quad q(t)e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}(\beta t)$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $q(t)$ un polinomio con coeficientes reales de grado n.

Entonces existe una solución particular de (12) de la forma

$$y_p = e^{\alpha t}(q_1^*(t)\cos(\beta t) + q_2^*(t)\,\mathrm{sen}(\beta t))$$

donde q_1^* y q_2^* son polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que n.

Ejemplo 16 Hallar la solución general de la ecuación

$$y' + 2y = \mathrm{sen}(3t).$$

La solución general de la ecuación homogénea es $y_h = ce^{-2t}$. Respecto de una solución particular, observamos que $\mathrm{sen}(t) = q(t)e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}(\beta t)$ con $q(t) = 1$, $\alpha = 0$ y $\beta = 3$. Segn el Teorema 6 existe una solución particular de la forma

$$y_p = A\cos(3t) + B\,\mathrm{sen}(3t).$$

Reemplazando en la ecuación y e y' por y_p e y_p', resulta A y B deben ser tales que

$$\begin{aligned} y_p' + 2y_p &= (-3A\,\mathrm{sen}(3t) + 3B\cos(3t)) + 2(A\cos(3t) + B\,\mathrm{sen}(3t)) \\ &= (-3A + 2B)\,\mathrm{sen}(3t) + (3B + 2A)\cos(3t) = \mathrm{sen}(3t). \end{aligned}$$

De allí resultan las ecuaciones

$$-3A + 2B = 1 \qquad \text{y} \qquad 3B + 2A = 0$$

cuya solución es $A = -3/13$ y $B = 2/13$. Luego

$$y_p = -\frac{3}{13}\cos(3t) + \frac{2}{13}\,\mathrm{sen}(3t),$$

y la solución general es

$$y = -\frac{3}{13}\cos(3t) + \frac{2}{13}\,\mathrm{sen}(3t) + ce^{-2t}.$$

2.3. Resumen

Resumimos aquí los métodos de resolución desarrollados para ecuaciones diferenciales lineales de 1er orden.

Consideremos la ecuación diferencial en la forma normal

$$y' + p(t)y = f(t), \quad p, f \in \mathcal{C}(\mathcal{I}).$$

Resolución por factor integrante

1. Hallar un primitiva $P(t)$ de $p(t)$;

2. multiplicar ambos miembros de la ecuación (4) por el factor integrante $\mu(t) = e^{P(t)}$, para obtener la ecuación
$$\underbrace{\mu(t)y' + \mu(t)p(t)y}_{[\mu(t)y]'} = \mu(t)f(t);$$
3. integrar ambos miembros de la ecuación y despejar $y(t)$.

Estructura de las soluciones

Solución general

$$y = y_p + c\phi_h, \quad c \in \mathbb{C},$$

donde y_p es una solución particular de la ecuación y ϕ_h es una solución no trivial de la ecuación homogénea asociada
$$y' + p(t)y = 0.$$

Soluciones de la ecuación homogénea

Una solución no trivial de la ecuación no homogénea es
$$\phi_h = e^{-P(t)} \quad \text{con} \quad P = \int p(t)dt.$$

Soluciones particulares

Método de variación de parámetros

Se propone $y_p = u\phi_h$ con ϕ_h una solución no trivial de la ecuación homogénea asociada. La función u se determina reemplazando en la ecuación y e y' por, respectivamente, y_p e y_p'. Se demuestra que
$$u = \int \frac{f(t)}{\phi_h(t)} dt.$$

Ecuación diferencial lineal de 1er orden a coeficientes constantes

$$y' - \lambda y = f(t), \quad \lambda \in \mathbb{C},\ f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}).$$

En este caso, una solución no trivial de la ecuación homogénea es
$$\phi_h = e^{\lambda t}.$$

La solución particular puede calcularse por variación de parámetros o, en ciertos casos, mediante el método de selección.

Método de selección

1. Si $f(t) = q(t)e^{\alpha t}$, con q un polinomio y $\alpha \in \mathbb{C}$ se propone
$$y_p = t^s \hat{q}(t) e^{\alpha t}$$
donde

- $s = 0$ si $\lambda \neq \alpha$ y $s = 1$ si $\lambda = \alpha$;
- $\hat{q}$ es un polinomio del mismo grado que q.

2. Si λ es real y $f(t) = q(t)e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ ó $f(t) = q(t)e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t)$, con q un polinomio con coeficientes reales y α y $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, se propone

$$y_p = e^{\alpha t}(q_1^*(t)\cos(\beta t) + q_2^*(t)\operatorname{sen}(\beta t))$$

donde q_1^* y q_2^* son polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual al grado de q.

3. Ecuación de segundo orden a coeficientes constantes

En lo que sigue estudiaremos la ecuación diferencial lineal de segundo orden a coeficientes constantes:

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(t) \tag{16}$$

donde a_0 y a_1 son números reales o complejos y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es una función continua. Como en las ecuaciones de lineales de primer orden, la ecuación es homogénea si $f(t) \equiv 0$, esto es, si se escribe

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{17}$$

y es inhomogénea o no homogénea en otro caso.

Teniendo en cuenta que $L : \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$, definida por

$$L(y) = y'' + a_1 y' + a_0 y$$

es una transformación lineal, y que resolver (16) ó (17) es equivalente a hallar, respectivamente, la preimagen de f a través de L o el núcleo de L, tenemos que:

1. El conjunto de soluciones de (17) es un subespacio de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$;
2. si y_p es una solución particular de (16), entonces todas las soluciones de (16) son de la forma
$$y = y_p + y_h$$
con y_h solución arbitraria de (17).

3.1. Ecuación homogénea

Comencemos por resolver la ecuación homogénea (17). Para ello será conveniente introducir el operador diferencial $D : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$, definido por $Dy = y'$ y sus potencias, $D^2 : \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$, $D^2 y = D(Dy) = y''$, $D^3 : \mathcal{C}^3(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$, $D^3 y = D(D^2 y) = y'''$, etc. Observamos que tanto D como sus potencias son transformaciones lineales.

Dado un polinomio $p(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0$, definimos la transformación lineal $p(D) : \mathcal{C}^n(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$, mediante

$$p(D)y = a_n D^n y + a_{n-1} D^{n-1} y + \cdots + a_1 Dy + a_0 y.$$

Con esta notación, la ecuación (16) puede escribirse en la forma

$$p(D)y = f(t)$$

con $p(r) = r^2 + a_1 r + a_0$. Este último polinomio se denomina *polinomio característico* de la ecuación. Por ejemplo, la ecuación

$$y'' + y' - 2y = \operatorname{sen}(t)$$

se escribe

$$D^2 y + Dy - 2y = (D^2 + D - 2)y = \operatorname{sen}(t),$$

y entonces $p(r) = r^2 + r - 2$ es el polinomio característico de esa ecuación. Una propiedad importante, la cual facilita la resolución de la ecuación homogénea es la siguiente:

Si el polinomio $p(r)$ se factoriza como producto de dos polinomios: $p(r) = q(r)v(r)$, entonces

$$p(D)y = q(D)(v(D)y) = v(D)(q(D)y),$$

esto es $p(D) = q(D)v(D) = v(D)q(D)$.

Por ejemplo, si $p(r) = r^2 + r - 2$, tenemos que $p(r) = (r-1)(r+2)$, luego

$$(D^2 + D - 2)y = (D-1)(D+2)y = (D+2)(D-1)y.$$

Veamos cómo esta factorización nos ayuda a resolver la ecuación homogénea

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

En primer lugar tenemos en cuenta que esta ecuación puede escribirse en la forma

$$(D+2)(D-1)y = 0. \tag{18}$$

Entonces, si llamamos $v = (D-1)y$, tenemos que y es solución de (18) si y sólo si y es solución de la ecuación de primer orden

$$(D-1)y = v$$

con v solución de la ecuación de primer orden

$$0 = (D+2)v = v' + 2v.$$

Como la solución general de la última ecuación es

$$v = ke^{-2t}, \qquad k \in \mathbb{C},$$

tenemos que las soluciones y de la ecuación (18) se obtienen resolviendo la ecuación de primer orden no homogénea

$$(D-1)y = ke^{-2t}, \quad k \in \mathbb{C}. \tag{19}$$

Pasamos a resolver ahora (19). La solución general de la ecuación homogénea

$$(D-1)y = 0 \quad \text{es } y_h = de^t \quad d \in \mathbb{C}.$$

Por el Teorema 5 que aparece en la sección 2.1, sabemos que existe una solución particular de la ecuación no homogénea (19) de la forma

$$y_p = Ae^{-2t}.$$

Sólo nos falta determinar el valor de la constante A. Para ello usamos que y_p debe ser solución de la ecuación no homogénea, esto es:

$$y_p' - y_p = -2Ae^{-2t} - Ae^{-2t} = -3Ae^{-2t} = ke^{-2t}.$$

Luego $A = -k/3$ y entonces

$$y_p = -\frac{k}{3}e^{-2t}$$

es solución particular de (19). Por lo tanto, la solución general de (19), que **también es la solución general de (18)** es

$$y = -\frac{k}{3}e^{-2t} + de^t, \qquad k, d \in \mathbb{C}.$$

Como k es una constante arbitraria, $d^* = -k/3$ también lo es, y entonces

$$y = d^* e^{-2t} + de^t, \qquad d^*, d \in \mathbb{C},$$

también es la solución general de la ecuación (18).

Observamos que en este ejemplo, el conjunto de soluciones de la ecuación homogénea (18) está generado por las funciones exponenciales $\phi_1(t) = e^{-2t}$ y $\phi_2(t) = e^t$, cuyos exponentes son las raíces del polinomio característico de la ecuación. Además, como $\{\phi_1, \phi_2\}$ es un conjunto l.i. (verifique mediante el wronskiano), tenemos que el conjunto de soluciones es de dimensión 2.

Lo que ocurre en este ejemplo no es casual, ya que se tiene el siguiente:

Teorema 7 Consideremos la ecuación diferencial de segundo orden lineal homogénea a coeficientes constantes (17).

Supongamos que el polinomio característico de la ecuación $p(r) = r^2 + a_1 r + a_0$ posee dos raíces diferentes λ_1 y λ_2. Entonces $\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\}$ es base del conjunto de soluciones de (17) y, en consecuencia,

$$y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C},$$

es la solución general de la ecuación (17).

Demostración. Como $p(r) = (r - \lambda_1)(r - \lambda_2)$, la ecuación (17) se escribe

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)y = 0. \tag{20}$$

Luego, llamando $v = (D - \lambda_2)y$, tenemos que y es solución de (20) si y sólo si y es solución de $(D - \lambda_2)y = v$ con v solución de

$$(D - \lambda_1)v = 0.$$

Como la solución general de la última ecuación es $v = ke^{\lambda_1 t}$ con $k \in \mathbb{C}$, tenemos que las soluciones de (20) coinciden con las de la ecuación

$$(D - \lambda_2)y = ke^{\lambda_1 t} \quad \text{con } k \in \mathbb{C}. \tag{21}$$

Por un lado la solución general de

$$(D-\lambda_2)y = 0$$

es $y_h = de^{\lambda_2 t}$ con $d \in \mathbb{C}$. Por otro, una solución particular de (21) se obtiene planteando una de la forma

$$y_p = Ae^{\lambda_1 t}$$

(que siempre existe por el punto 2. del Teorema 5 que mencionamos antes) y determinando A a través de la ecuación que debe satisfacer y_p:

$$y_p' - \lambda_2 y_p = \lambda_1 A e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 A e^{\lambda_1 t} = (\lambda_1 - \lambda_2) A e^{\lambda_1 t} = k e^{\lambda_1 t}.$$

El valor de A es entonces $A = \frac{k}{\lambda_1 - \lambda_2}$.

Luego, la solución general de (21) y por lo tanto de (20) es

$$y = \frac{k}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + de^{\lambda_2 t}, \qquad k, d \in \mathbb{C}.$$

Llamando $c_1 = \frac{k}{\lambda_1 - \lambda_2}$ y $c_2 = d$, tenemos que la solución general de (20) es

$$y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

De esto se deduce que $\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\}$ genera al conjunto de soluciones de la ecuación homogénea. Para ver que es base basta ver que es l.i., pero, ello es inmediato dado que el wronskiano es

$$W(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}) = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} \neq 0.$$

Ejemplo 17 Consideremos la ecuación

$$y'' - 2y' + 5y = 0.$$

Su polinomio característico es $p(r) = r^2 - 2r + 5$, cuyas raíces son $\lambda_1 = 1 - 2i$ y $\lambda_2 = 1 + 2i$ (una es la conjugada de la otra porque el polinomio es de coeficientes reales).

Entonces la solución general de la ecuación es

$$y = c_1 e^{(1+2i)t} + c_2 e^{(1-2i)t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Como

$$e^{(1+2i)t} = e^t(\cos(2t) + i\,\mathrm{sen}(2t)) \quad \text{y} \quad e^{(1-2i)t} = e^t(\cos(2t) - i\,\mathrm{sen}(2t)),$$

tenemos que

$$\begin{aligned} c_1 e^{(1+2i)t} + c_2 e^{(1-2i)t} &= c_1 e^t(\cos(2t) + i\,\mathrm{sen}(2t)) + c_2 e^t(\cos(2t) - i\,\mathrm{sen}(2t)) \\ &= (c_1 + c_2)e^t \cos(2t) + i(c_1 - c_2)e^t \,\mathrm{sen}(2t) \\ &= d_1 e^t \cos(2t) + d_2 e^t \,\mathrm{sen}(2t), \end{aligned}$$

con $d_1 = c_1 + c_2$ y $d_2 = i(c_1 - c_2)$. Luego, el conjunto de soluciones de la ecuación homogénea también está generado por $\{e^t \cos(2t), e^t \,\mathrm{sen}(2t)\}$. Dado que la dimensión del subespacio solución es dos, este conjunto de funciones debe entonces ser necesariamente l.i. y por lo tanto base.

Lo que hicimos en este ejemplo particular, puede hacerse en general cuando el polinomio característico de la ecuación posee un par de raíces complejas conjugadas, teniéndose el siguiente resultado.

Teorema 8 Consideremos la ecuación diferencial de segundo orden lineal homogénea a coeficientes constantes (17).

Supongamos que el polinomio característico de la ecuación $p(r) = r^2 + a_1 r + a_0$ posee dos raíces complejas conjugadas: $\lambda_1 = a + bi$, $\lambda_2 = a - bi$, $b \neq 0$. Entonces $\{e^{at}\cos(bt), e^{at}\operatorname{sen}(bt)\}$ es base del conjunto de soluciones de (17) y, en consecuencia,

$$y = c_1 e^{at}\cos(bt) + c_2 e^{at}\operatorname{sen}(bt), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C},$$

es la solución general de la ecuación (17).

Nos falta estudiar el caso en que el polinomio caracterítico de la ecuación tiene una raíz doble. El siguiente teorema nos dice qué sucede en ese caso.

Teorema 9 Consideremos la ecuación diferencial de segundo orden lineal homogénea a coeficientes constantes (17).

Supongamos que el polinomio característico de la ecuación $p(r) = r^2 + a_1 r + a_0$ posee una raíz doble λ. Entonces $\{e^{\lambda t}, te^{\lambda t}\}$ es base del conjunto de soluciones de (17) y, en consecuencia,

$$y = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C},$$

es la solución general de la ecuación (17).

Demostración. Como $p(r) = (r - \lambda)^2$, la ecuación (17) se escribe

$$(D - \lambda)(D - \lambda)y = 0. \tag{22}$$

Luego, llamando $v = (D - \lambda)y$, tenemos que y es solución de (22) si y sólo si y es solución de $(D - \lambda)y = v$ con v tal que

$$(D - \lambda)v = 0.$$

Como la solución general de la última ecuación es $v = ke^{\lambda t}$ con $k \in \mathbb{C}$, tenemos que las soluciones de (22) coinciden con las de la ecuación

$$(D - \lambda)y = ke^{\lambda t} \quad \text{con } k \in \mathbb{C}. \tag{23}$$

Por un lado la solución general de

$$(D - \lambda)y = 0$$

es $y_h = de^{\lambda t}$ con $d \in \mathbb{C}$. Por otro, una solución particular se obtiene planteando una de la forma

$$y_p = Ate^{\lambda t}$$

(que siempre existe por el punto 1. del Teorema 5) y determinando A a través de la ecuación:

$$y_p' - \lambda y_p = Ae^{\lambda t} + \lambda Ate^{\lambda t} - At\lambda e^{\lambda t} = Ae^{\lambda t} = ke^{\lambda t};$$

luego $A = k$.

Entonces la solución general de (23) y por lo tanto de (22) es

$$y = kte^{\lambda t} + de^{\lambda t}, \qquad k, d \in \mathbb{C}.$$

Llamando $c_2 = k$ y $c_1 = d$, tenemos que la solución general de (22) es

$$y = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda_2 t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

De esto se deduce que $\{e^{\lambda t}, te^{\lambda t}\}$ genera al conjunto de soluciones de la ecuación homogénea. Para ver que es base basta ver que es l.i., pero, ello es inmediato del hecho que

$$W(e^{\lambda t}, te^{\lambda t}) = e^{2\lambda t} \neq 0.$$

Ejemplo 18 Hallar la solución del problema a valores iniciales

$$y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 0.$$

Como el polinomio característico es $p(r) = r^2 + 4r + 4 = (r+2)^2$, tenemos que la solución general de la ecuación es:

$$y = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Como

$$1 = y(0) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}|_{t=0} = c_1,$$

tenemos que $c_1 = 1$.

Por otro lado, dado que

$$0 = y'(0) = -2c_1 e^{-2t} - 2c_2 t e^{-2t} + c_2 e^{-2t}|_{t=0} = -2 + c_2,$$

resulta $c_2 = 2$. Por lo tanto, la solución buscada es

$$y = e^{-2t} + 2te^{-2t}.$$

Para finalizar el análisis de la ecuación homogénea (17) enunciamos el siguiente resultado sobre el wronskiano de una base de soluciones de la misma, que será utilizado en lo que sigue.

Teorema 10 Sea $\{\phi_1, \phi_2\}$ una base de soluciones de la ecuación (17). Entonces

$$W(\phi_1, \phi_2)(t) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Basta probar que el resultado es cierto para alguna base $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ del conjunto solución, dado que si $\{\phi_1, \phi_2\}$ es otra base, entonces

$$\phi_1 = c_{11}\varphi_1 + c_{21}\varphi_2 \quad \text{y} \quad \phi_2 = c_{12}\varphi_1 + c_{22}\varphi_2.$$

Como $[c_{11} \ c_{21}]^t$ y $[c_{12} \ c_{22}]^t$ son los vectores de coordenadas de, respectivamente, ϕ_1 y ϕ_2 en la base $\{\varphi_1, \varphi_2\}$, y $\{\phi_1, \phi_2\}$ es l.i., el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Un simple cálculo prueba que

$$W(\phi_1, \phi_2)(t) = \Delta.W(\varphi_1, \varphi_2)(t).$$

Con lo cual $W(\phi_1, \phi_2)(t) \neq 0$ si y sólo si $W(\varphi_1, \varphi_2)(t) \neq 0$.

Como en el caso en que las raíces λ_1, λ_2 del polinomio característico de la ecuación son distintas, $\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\}$ es base y

$$W(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}) = (\lambda_1 - \lambda_2)e^{(\lambda_1+\lambda_2)t} \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

y en el caso en que el polinomio posee una raíz dobel λ, $\{e^{\lambda t}, te^{\lambda t}\}$ es base y

$$W(e^{\lambda t}, te^{\lambda t}) = e^{2\lambda t} \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

queda probado el teorema.

3.2. Ecuación no homogénea

Vamos ahora a encarar la resolución de la ecuación no homogénea (16). Dado lo expuesto anteriormente y que ya sabemos resolver la ecuación homogénea asociada, sólo nos falta exponer algún método para hallar soluciones particulares de la misma.

Método de variación de parámetros

Supongamos que conocemos una base $\{\phi_1, \phi_2\}$ del conjunto de soluciones de la ecuación homogénea (17). Entonces proponemos una solución particular de (16) de la forma

$$y_p = u_1\phi_1 + u_2\phi_2 \tag{24}$$

con u_1 y u_2 funciones a determinar. Derivando y_p obtenemos

$$y_p' = u_1'\phi_1 + u_1\phi_1' + u_2'\phi_2 + u_2\phi_2'.$$

Impongamos la condición

$$u_1'\phi_1 + u_2'\phi_2 = 0. \tag{25}$$

Entonces

$$y_p' = u_1\phi_1' + u_2\phi_2'.$$

Derivando nuevamente

$$y_p'' = u_1'\phi_1' + u_1\phi_1'' + u_2'\phi_2' + u_2\phi_2''.$$

Reemplazando en (16), y, y', y'' por y_p, y_p', y_p'', respectivamente, y agrupando convenientemente, llegamos a

$$u_1(\phi_1'' + a_1\phi_1' + a_0\phi_1) + u_2(\phi_2'' + a_1\phi_2' + a_0\phi_2) + u_1'\phi_1' + u_2'\phi_2' = f.$$

Como ϕ_1 y ϕ_2 son soluciones de la ecuación homogénea asociada, finalmente queda la condición

$$u_1'\phi_1' + u_2'\phi_2' = f. \tag{26}$$

Luego, si hallamos u_1 y u_2 que satisfagan las condiciones (25) y (26), la función y_p definida en (24) será solución particular de la ecuación no homogénea.

Veamos ahora que tales funciones siempre pueden ser halladas. Las condiciones (25) y (26) pueden expresarse matricialmente en la forma

$$\begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_1' & \phi_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Como la matriz cuadrada de la izquierda tiene determinante no nulo, (pues éste es $W(\phi_1, \phi_2)$ y $\{\phi_1, \phi_2\}$ es base de soluciones de la ecuación homogénea), tenemos que

$$\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_1' & \phi_2' \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Un simple cálculo (regla de Cramer) muestra que

$$u_1' = -\frac{\phi_2 f}{W(\phi_1, \phi_2)} \qquad \text{y} \qquad u_2' = \frac{\phi_1 f}{W(\phi_1, \phi_2)}.$$

Ejemplo 19 Resolver la ecuación

$$y'' - y' = \frac{1}{e^t + 1}.$$

Como $p(r) = r^2 - r = r(r-1)$, tenemos que $\{1, e^t\}$ es una base de soluciones de la ecuación homogénea asociada. Además $W(1, e^t) = e^t$. Entonces, una solución particular de la ecuación no homogénea es

$$y_p = u_1 + u_2 e^t,$$

con

$$u_1' = -\frac{e^t}{e^t(e^t+1)} = -\frac{1}{e^t+1}$$

y

$$u_2' = \frac{1}{e^t(e^t+1)}.$$

Integrando obtenemos

$$u_1 = -\ln\left(\frac{e^t}{1+e^t}\right) \quad \text{y} \quad u_2 = -e^{-t} - \ln\left(\frac{e^t}{1+e^t}\right).$$

Entonces

$$y_p = -\ln\left(\frac{e^t}{1+e^t}\right) + \left[-e^{-t} - \ln\left(\frac{e^t}{1+e^t}\right)\right] e^t = -1 - (e^t+1)\ln\left(\frac{e^t}{1+e^t}\right),$$

es solución particular de la ecuación no homogénea.

Finalmente, la solución general es

$$y = 1 - (e^t+1)\ln\left(\frac{e^t}{1+e^t}\right) + c_1 + c_2 e^t.$$

Método de selección o de constantes indeterminadas

El método que expondremos a continuación sólo se aplica al caso en que la función f que aparece en la ecuación (16) pertenece a una determinada clase de funciones.

Teorema 11 Consideremos la ecuación diferencial de segundo orden lineal homogénea a coeficientes constantes (16).

Entonces

1. Si $f(t) = q(t)e^{\lambda t}$, con q un polinomio y $\lambda \in \mathbb{C}$ entonces existe una solución particular y_p de (16) de la forma
$$y_p = t^s \hat{q}(t)e^{\lambda t}$$
con s la multiplicidad de λ como raíz del polinomio característico de la ecuación ($s = 0$ si λ no es raíz) y $\hat{q}$ un polinomio del mismo grado que q.

2. Si los coeficientes de la ecuación (16) son reales y $f(t) = q(t)e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ ó $f(t) = q(t)e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}(\beta t)$, con q un polinomio con coeficientes reales y α y $\beta \in \mathbb{R}$, existe una solución particular y_p de (16) de la forma
$$y_p = t^s e^{\alpha t}(\hat{q}_1(t)\cos(\beta t) + \hat{q}_2(t)\,\mathrm{sen}(\beta t))$$
con s la multiplicidad de $\lambda = \alpha + i\beta$ como raíz del polinomio característico de la ecuación ($s = 0$ si λ no es raíz) y $\hat{q}_1$ y $\hat{q}_2$ polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual al grado de q.

Demostración. Comencemos demostrando el punto 1. Sean λ_1 y λ_2 las raíces del polinomio característico de la ecuación (λ_1 y λ_2 podrían ser iguales), entonces (16) se escribe

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)y = q(t)e^{\lambda t}.$$

Notamos que si v_p satisface

$$(D - \lambda_1)v_p = q(t)e^{\lambda t} \tag{29}$$

e y_p satisface

$$(D - \lambda_2)y_p = v_p, \tag{30}$$

entonces y_p es solución particular de (16).

Hay tres casos que considerar.

Caso 1: λ no es raíz del polinomio característico, es decir, $\lambda \neq \lambda_1$ y $\lambda \neq \lambda_2$ ($s = 0$). Como $\lambda \neq \lambda_1$, debido al punto 2. del Teorema 5 sabemos que existe una función v_p de la forma $v_p = \tilde{q}(t)e^{\lambda t}$, con $\tilde{q}$ del mismo grado que q, que satisface (29). Pero entonces, aplicando el mismo teorema y dado que $\lambda \neq \lambda_2$, sabemos que existe una función y_p de la forma $y_p(t) = \hat{q}(t)e^{\lambda t}$, con $\hat{q}$ del mismo grado que $\tilde{q}$, que satisface (30) y que por lo tanto es solución particular de (16).

Caso 2: λ es raíz simple del polinomio característico ($s = 1$). Podemos suponer, sin perder generalidad que $\lambda = \lambda_2$ y que $\lambda \neq \lambda_1$. Por las mismas razones que en el caso 1, existe v_p de la forma $v_p = \tilde{q}(t)e^{\lambda t}$, con $\tilde{q}$ del mismo grado que q, que satisface (29). Como ahora $\lambda = \lambda_2$ tenemos que por el punto 1. del Teorema 5, existe una función $y_p(t) = t\hat{q}(t)e^{\lambda t}$, con $\hat{q}$ del mismo grado que $\tilde{q}$, que satisface (30) y que es entonces solución particular de (16).

Caso 3: λ es raíz doble del polinomio característico ($s = 2$). Entonces $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$. Dado que $\lambda = \lambda_1$, por el punto 1. del Teorema 3 existe v_p de la forma $v_p = t\tilde{q}(t)e^{\lambda t}$, con $\tilde{q}$ del mismo grado que q, que satisface (29). Llamemos $\check{q} = t\tilde{q}$. Entonces $\check{q}$ tiene un grado más que $\tilde{q}$. Aplicando ahora nuevamente el punto 1. del Teorema 3 tenemos que existe una función $y_p(t) = t\bar{q}(t)e^{\lambda t}$, con $\bar{q}$ del mismo grado que $\check{q}$, que satisface (30) y que es entonces solución particular de (16).

Hasta aquí hemos probado la existencia de una solución particular

$$y_p = t\bar{q}(t)e^{\lambda t}$$

con $\bar{q}$ un polinomio de un grado más que q. Todavía no hemos probado el resultado enunciado, pues la forma que buscamos para la solución particular es $y_p = t^2\hat{q}(t)e^{\lambda t}$ con $\hat{q}$ del mismo grado que q.

Sea n el grado de q. Entonces $\bar{q} = c_{n+1}t^{n+1} + \cdots + c_1 t + c_0$, $t\bar{q} = c_{n+1}t^{n+2} + \cdots + c_1 t^2 + c_0 t$ y la y_p hallada se expresa como

$$\begin{aligned} y_p &= (c_{n+1}t^{n+2} + \cdots + c_1 t^2 + c_0 t)e^{\lambda t} \\ &= t^2(c_{n+1}t^n + \cdots + c_1)e^{\lambda t} + c_0 te^{\lambda t} \\ &= t^2\hat{q}e^{\lambda t} + c_0 te^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Como λ es raíz doble del polinomio característico, $c_0 te^{\lambda t}$ es solución de la ecuación homogénea asociada; por lo tanto

$$y_p^* = y_p - c_0 te^{\lambda t} = t^2\hat{q}e^{\lambda t}$$

también es solución particular de la ecuación no homogénea, y se encuentra en la forma que estábamos buscando.

Para demostrar el punto 2 es necesario tener en cuenta el siguiente resultado:

Supongamos que la ecuación (16) tiene coeficientes reales y que $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ con $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Entonces, si $y_p = y_{p1} + iy_{p2}$, con $y_{pi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es solución particular de (16) se tiene que

$$y''_{pi} + a_1 y'_{pi} + a_0 y_{pi} = f_i(t), \quad i = 1, 2.$$

Es decir, las partes real e imaginaria de una solución de (16) satisfacen la ecuación (16) reemplazando en ella f por, respectivamente, las partes real e imaginaria de f.

En efecto, como $y'_p = y'_{p1} + iy'_{p2}$ e $y''_p = y''_{p1} + iy''_{p2}$, tenemos que

$$\begin{aligned} f_1(t) + if_2(t) &= (y''_{p1}(t) + iy''_{p2}(t)) + a_1(y'_{p1}(t) + iy'_{p2}(t)) + a_0(y_{p1}(t) + iy_{p2}(t)) \\ &= (y''_{p1}(t) + a_1 y'_{p1}(t) + a_0 y_{p1}(t)) + i(y''_{p2}(t) + a_1 y'_{p2}(t) + a_0 y_{p2}(t)). \end{aligned}$$

Como lo que figura dentro de cada paréntesis en la última linea es real (aquí se usa que a_1 y a_0 son reales), necesariamente

$$y''_{p1}(t) + a_1 y'_{p1}(t) + a_0 y_{p1}(t) = f_1(t) \qquad \text{e} \qquad y''_{p2}(t) + a_1 y'_{p2}(t) + a_0 y_{p2}(t) = f_2(t),$$

que es lo que se afirmaba.

Pasamos a probar entonces el punto 2. Supongamos que $f(t) = q(t)e^{\alpha t}\cos(\beta t)$, con q un polinomio con coeficientes reales y α y β reales. Supongamos que $\beta \neq 0$ (si $\beta = 0$ estamos en el caso anterior.) Si consideramos $F(t) = q(t)e^{\lambda t}$, con $\lambda = \alpha + i\beta$, tenemos que $f(t)$ es la parte real de $F(t)$. Por el punto 1. ya demostrado, sabemos que la ecuación

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = F(t),$$

admite una solución particular y_p de la forma

$$y_p = t^s \hat{q}(t)e^{\lambda t}$$

donde s es la multiplicidad de λ como raíz del polinomio característico de la ecuación y $\hat{q}$ es un polinomio del mismo grado que q ($\hat{q}$ podría tener coeficientes complejos). Sabemos también que la parte real de y_p es solución de la ecuación

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(t),$$

dado que f es parte real de F. Veamos entonces que forma tiene la parte real de y_p, que denominamos y_{p1}.

Escribamos $\hat{q}(t) = \hat{q}_1(t) + i\hat{q}_2(t)$, donde $\hat{q}_1(t)$ y $\hat{q}_2(t)$ son, respectivamente, las partes real e imaginaria de $\hat{q}$. Tanto $\hat{q}_1(t)$ como $\hat{q}_2(t)$ son polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual al de $\hat{q}$.

Entonces

$$\begin{aligned} y_p &= t^s \hat{q}(t)e^{\lambda t} \\ &= t^s(\hat{q}_1(t) + i\hat{q}_2(t))e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\,\mathrm{sen}(\beta t)) \\ &= [t^s e^{\alpha t}(\hat{q}_1(t)\cos(\beta t) - \hat{q}_2(t)\,\mathrm{sen}(\beta t))] + i[t^s e^{\alpha t}(\hat{q}_1(t)\,\mathrm{sen}(\beta t) + \hat{q}_2(t)\cos(\beta t))], \end{aligned}$$

con lo cual

$$y_{p1} = t^s e^{\alpha t}(\hat{q}_1(t)\cos(\beta t) - \hat{q}_2(t)\,\mathrm{sen}(\beta t))$$

tiene la forma prescripta en la tesis del teorema.

Si $f(t) = q(t)e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}(\beta t)$ entonces $f(t)$ es la parte imaginaria de $F(t)$ y, la parte imaginaria y_{p2} de la solución y_p es una solución particular de la ecuación (16) para tal $f(t)$. Pero, por lo desarrollado arriba, tenemos que

$$y_{p2} = t^s e^{\alpha t}(\hat{q}_1(t)\,\mathrm{sen}(\beta t) + \hat{q}_2(t)\cos(\beta t)),$$

que también tiene la forma prescripta en la tesis del teorema.

Veamos algunos ejemplos de aplicación del método de selección.

Ejemplo 20 Hallar la solución general de la ecuación

$$y'' + 2y' - 3y = t + 1.$$

Dado que el polinonio característico es

$$p(r) = r^2 + 2r - 3 = (r-1)(r+3),$$

la solución general de la ecuación homogénea asociada es

$$y_h = c_1 e^t + c_2 e^{-3t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Respecto de una solución particular, dado que el lado derecho de la ecuación es de la forma $f(t) = q(t)e^{\lambda t}$, con $q(t) = t + 1$ y $\lambda = 0$, y λ no es raíz del polinomio característico, por el Teorema anterior sabemos que existe una solución particular y_p de la forma

$$y_p = At + B$$

con A y B constantes a determinar.

Como $y_p' = A$ e $y_p'' = 0$, reemplazando en la ecuación queda

$$2A - 3(At + B) = -3At + (2A - 3B) = t + 1,$$

con lo cual $-3A = 1 \Rightarrow A = -1/3$ y $2A - 3B = 1 \Rightarrow B = -5/9$. Entonces

$$y_p = -\frac{1}{3}t - \frac{5}{9}$$

es una solución particular de la ecuación no homogénea y la solución general es

$$y = -\frac{1}{3}t - \frac{5}{9} + c_1 e^t + c_2 e^{-3t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Supongamos que ahora la ecuación es

$$y'' + 2y' - 3y = (t - 1)e^t.$$

Como ya hemos calculado la solución general de la ecuación homogénea asociada, sólo resta calcular una solución particular. Cómo en este caso $f(t) = q(t)e^{\lambda t}$ con $q(t) = t - 1$ y $\lambda = 1$ y λ es raíz simple del polinomio caracterítico, existe y_p de la forma

$$y_p = t(At + B)e^t = (At^2 + Bt)e^t.$$

Derivando y_p y reemplazando en la ecuación queda

$$[At^2 + (4A + B)t + (2A + 2B)]e^t + 2[At^2 + (2A + B)t + B]e^t - 3[At^2 + Bt]e^t = (t - 1)e^t.$$

Reagrupando y cancelando términos llegamos a que

$$8At + (2A + 4B) = t - 1$$

y, por lo tanto $8A = 1 \Rightarrow A = 1/8$ y $2A + 4B = -1 \Rightarrow B = -5/16$. Luego

$$y_p = \left(\frac{1}{8}t^2 - \frac{5}{16}t\right) e^t$$

y la solución general es

$$y = \left(\frac{1}{8}t^2 - \frac{5}{16}t\right) e^t + c_1 e^t + c_2 e^{-3t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Ejemplo 21 Hallar la solución general de la ecuación

$$y'' - y = e^t \cos(2t).$$

La solución general de la ecuación homogénea es

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{-t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C},$$

pues el polinomio característico es $p(r) = r^2 - 1 = (r-1)(r+1)$. Respecto de la solución particular, como f es de la forma $f(t) = q(t)e^{\alpha t}\cos(\beta t)$, con $q(t) = 1$, $\alpha = 1$ y $\beta = 2$, y $\lambda = \alpha + i\beta = 1 + 2i$ no es raíz del polinomio p, existe una solución particular de la forma

$$y_p = e^t(A\cos(2t) + B\,\mathrm{sen}(2t)),$$

con A y B constantes a determinar. Dado que

$$y_p'' = e^t((4B - 3A)\cos(2t) - (4A + 3B)\,\mathrm{sen}(2t)),$$

tenemos que

$$y_p'' - y_p = e^t[(-4A + 4B)\cos(2t) + (-4A - 4B)\,\mathrm{sen}(2t)] = e^t\cos(2t).$$

Por lo tanto,

$$-4A + 4B = 1 \qquad \text{y} \qquad -4A - 4B = 0.$$

Resolviendo las ecuaciones se obtienen: $A = -1/8$ y $B = 1/8$.

Luego

$$y_p = e^t\left(\frac{1}{8}\,\mathrm{sen}(2t) - \frac{1}{8}\cos(2t)\right),$$

es solución particular y

$$y = e^t\left(\frac{1}{8}\,\mathrm{sen}(2t) - \frac{1}{8}\cos(2t)\right) + c_1 e^t + c_2 e^{-t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

es la solución general.

3.3. Resumen

Resumimos aquí lo desarrollado para ecuaciones diferenciales de segundo orden a coeficientes constantes.

Dada la ecuación diferencial

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(t), \quad a_1, a_0 \in \mathbb{C}, \quad f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}),$$

Solución general

$$y = y_p + c_1\phi_1 + c_2\phi_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C},$$

donde y_p es una solución particular de la ecuación y $\{\phi_1, \phi_2\}$ es un conjunto linealmente independiente de soluciones de la ecuación homogénea asociada

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Soluciones de la ecuación homogénea

Polinomio característico de la ecuación: $p(r) = r^2 + a_1 r + a_0$.

Si λ_1 y λ_2 son las raíces de $p(r)$ se tiene que:

1. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces $\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\}$ es un conjunto l.i. de soluciones de la ec. homogénea.
2. Si a_1 y a_0 son reales y $\lambda_1 = a + bi$ y $\lambda_2 = a - bi$ con a y b reales, $b \neq 0$, entonces $\{e^{at}\cos(bt), e^{at}\operatorname{sen}(bt)\}$ es un conjunto l.i. de soluciones de la ec. homogénea.
3. Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, entonces $\{e^{\lambda t}, te^{\lambda t}\}$ es un conjunto l.i. de soluciones de la ec. homogénea.

Soluciones particulares

Método de variación de parámetros

$$y_p = u_1\phi_1 + u_2\phi_2$$

con $\{\phi_1, \phi_2\}$ un conjunto linealmente independiente de soluciones de la ecuación homogénea asociada y u_1, u_2 tales que

$$u_1' = -\frac{\phi_2 f}{W(\phi_1, \phi_2)} \qquad \text{y} \qquad u_2' = \frac{\phi_1 f}{W(\phi_1, \phi_2)},$$

siendo $W(\phi_1, \phi_2) = \phi_1\phi_2' - \phi_2\phi_1'$.

Método de selección

1. Si $f(t) = q(t)e^{\lambda t}$, con q un polinomio y $\lambda \in \mathbb{C}$ se propone

   $$y_p = t^s \hat{q}(t) e^{\lambda t}$$

   donde

   - s es la multiplicidad de λ como raíz del polinomio característico de la ecuación ($s = 0$ si λ no es raíz);
   - $\hat{q}$ es un polinomio del mismo grado que q.

2. Si los coeficientes de la ecuación (16) son reales y $f(t) = q(t)e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ ó $f(t) = q(t)e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t)$, con q un polinomio con coeficientes reales y α y $\beta \in \mathbb{R}$, se propone

   $$y_p = t^s e^{\alpha t}(\hat{q}_1(t)\cos(\beta t) + \hat{q}_2(t)\operatorname{sen}(\beta t))$$

   donde

   - s es la multiplicidad de $\lambda = \alpha + i\beta$ como raíz del polinomio característico de la ecuación ($s = 0$ si λ no es raíz);
   - $\hat{q}_1$ y $\hat{q}_2$ son polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual al grado de q.

4. Referencias

Para profundizar sobre ecuaciones diferenciales lineales y no lineales o ver sus aplicaciones, el lector puede consultar, entre muchos otros, los siguientes libros.

- Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado, Dennis G. Zill, Thomson.
- Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas, George F. Simmons, McGraw Hill.
- Calculus, tomos I y II, Tom Apostol, Reverté.
- Advanced engineering mathematics, Erwin Kreyszig, Willey.
- Ecuaciones diferenciales un enfoque de modelado, Glenn Ledder, McGraw Hill.